Title: Andreas Altwein - Der Mengenbegriff
Description: Mathematische Grundlagen - der Mengenbegriff

Der Mengenbegriff

Unter einer *Menge* verstehen wir eine Zusammenfassung mehrerer Elemente, die zueinander gehören. Da sich die Mathematik
oft mit Zahlen beschäftigt, bestehen diese Elemente sehr oft aus ebensolchen. Per Definition muss das nicht unbedingt so sein.
Genauso gut könnte man eine Menge der griechischen Buchstaben bilden. Oder eine Menge, die Elemente enthält, die selbst
wieder Mengen sind. Allerdings sollten wir erst einmal einfach anfangen.

Die Menge der natürlichen Zahlen dürfte im allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden. Hierbei handelt es sich um eine
Menge, die unendliche viele Elemente beinhaltet, nämlich alle Zahlen, die größer oder gleich Null sind. Die explizite
Notation dieser Menge sieht wie folgt aus:

$\mathbb{N} := \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$

> **Achtung:** An dieser Stelle möchte ich ausdrücklich darauf hinweisen, dass die *Reihenfolge* der Elemente in
> einer Menge völlig gleich ist. Auch wenn die natürlichen Zahlen eine Reihenfolge haben, spielt diese in der
> Mengenlehre keine Rolle. Eine Menge, die eine endliche oder unendliche Anzahl *geordneter* Elemente enthält,
> ist keine Menge mehr, sondern eine Folge.

Die obige Darstellung der Folge $\mathbb{N}$ wird *explizit* genannt, weil ihre Elemente
explizit aufgezählt werden. Da die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist, können natürlich nicht alle Elemente
genannt werden, sondern man setzt auf die sonst in Intelligenztests übliche Methode, mit einem … auszudrücken, dass weitere
Elemente folgen, und dass die ersten Elemente genügend Anhaltspunkte für den weiteren Verlauf geben.

Infolgedessen ist die explizite Darstellung nicht immer glücklich. Denn einerseits unterliegen die Elemente der Menge
keiner Ordnung, auf der anderen Seite gebe ich oben explizit eine Reihenfolge an, damit der Leser mutmaßen kann, welche
Elemente ebenfalls Bestandteil dieser Menge sind.

In vielen Fällen ist deshalb eine deskriptive Beschreibung von Mengen sinnvoller. Nehmen wir als Beispiel die
Menge der Quadratzahlen:

$A := \{0,1,4,9,16,25,\ldots\}$

Die Menge der Quadratzahlen erhält man, in dem man jede existierende natürliche Zahl nimmt und sie mit sich selbst
multipliziert. Die deskriptive Beschreibung macht nichts anderes, als diesen Sachverhalt in einer mathematischen
Notation auszudrücken:

$A := \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

, sprich: Die Menge A besteht aus allen n^2, mit n
Element der natürlichen Zahlen.

Als weitere Eigenschaft von Mengen wollen wir festhalten, dass Mengen *niemals doppelte Elemente* enthalten. Die Menge
A:={1,1} ist also keine gültige Mengendefition!

Just aus diesem Beispiel erkennen wir, dass eine Menge nicht zwingend eine unendliche Anzahl von Zahlen beinhalten muss,
sondern durchaus auch aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen kann. Es sind also drei elementare Eigenschaften, die
eine Menge besitzt:

> - eine Menge kann aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Elementen bestehen
> - die Elemente einer Menge sind nicht geordnet
> - eine Menge enthält keine doppelten Elemente (=jedes Element darf in einer Menge nur einmal vorkommen)

Die leere Menge

Neben den endlichen und unendlichen Mengen gibt es noch eine ganz besondere Menge, nämlich die leere Menge

$\emptyset := \{\}$

Diese Menge enthält genau gar kein Element.

Teil- und Obermengen

Angenommen wir haben zwei Mengen

$A := \{n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

und

$B := \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Da jede natürliche Zahl aus der Menge B auch ein Element der ganzen Zahlen (Menge A) ist, sagt

man,
dass B eine Teilmenge von A ist und schreibt:

$B \subseteq A$

Umgekehrt gilt aber auch immer dann, wenn B eine Teilmenge von A ist, dass A eine Obermenge von B ist:

$A \supseteq B$

Theoretisch kann man hier noch unterscheiden, ob es sich um eine *echte* oder um *keine echte* Teilmenge handelt. Bei einer echten Teilmenge, sind die Mengen nicht identisch, sprich: die Obermenge muss mindestens über ein Element verfügen, welches nicht in der Teilmenge vertreten ist.

In unserem obigen Beispiel ist dies der Fall, denn die Obermenge A enthält unendlich viele negative
Zahlen, die wir nicht in der Teilmenge B der natürlichen Zahlen finden können.

Tatsächlich ist aber auch jede Menge eine Teilmenge von sich selber. In diesem Fall handelt es sich
um keine echte Teilmenge.

Ein weiterer interessanter Fall tritt auf, wenn wir die leere Menge betrachten, also die Menge, die über kein einziges Element verfügt. Grundsätzlich ist die leere Menge eine Teilmenge von jeder anderen Menge!

> - Eine Menge A ist dann eine Teilmenge einer Menge B, wenn alle Elemente von A auch in B vorhanden sind.
> - Die leere Menge ist Teilmenge jeder anderen existierenden Menge
> - Jede Menge hat sich selbst als Teilmenge
> - Eine Menge A ist genau dann eine echte Teilmenge von B, wenn alle Elemente von A in B vorhanden sind, und wenn mindestens ein Element von B nicht in A vorhanden ist

Teilmenge und Obermenge gehen immer Hand in Hand. Es ist

$A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A$

, sprich: A ist genau dann eine Teilmenge von B, wenn B eine Obermenge von A ist und B ist genau
dann eine Obermenge von A, wenn A eine Teilmenge von B ist. Daraus kann man wiederum schließen,
dass A keine Teilmenge von B ist, wenn B keine Obermenge von A ist, bzw. dass B keine Obermenge von
A ist, wenn A keine Teilmenge von B ist, oder in mathematischer Notation:

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow B \not\supseteq A$

Elemente von Mengen

Wie bereits eingangs beschrieben, setzen sich die Elemente einer Menge meist aus Zahlen zusammen. Ein ebenso häufig vorzufindendes Phänomen ist aber auch eine Menge, deren Elemente
selber wieder Mengen sind, z.B.

$A := \{\{1,2,3\},\{7,8,9\}\}$

In diesem Fall enthält die Menge A selbst wieder zwei Mengen, nämlich zum einen die Menge {1,2,3}, zum anderen die Menge {7,8,9}.

> **Achtung:**: Der obige Fall bedeutet keineswegs, dass die Menge A aus den 6 Elementen 1,2,3,7,8,9
> besteht! A hat tatsächlich nur zwei Elemente, nämlich einerseits die Menge {1,2,3} und andererseits
> die Menge {7,8,9}.

Nun kommt das große "Aber": Obwohl die obige Menge A als Elemente nur zwei weitere Mengen enthält, können wir A auch
derart definieren, dass sie sowohl Zahlen als auch Mengen, ja sogar solche Elemente enthält, die Mengen von Mengen sind.
Damit können teilweise ziemlich unansehnliche Monster geschaffen werden, die aber per Definition gültige Mengen sind:

$$M_1 = \{1,2,3\}$$
$$M_2 = \{7,8,9\}$$
$$K = \{M_1,M_2\}$$
$$A = \{1,K,M_1,M_2\} = \{1,\{\{1,2,3\},\{7,8,9\}\},\{1,2,3\},\{7,8,9\}\}$$

Die Menge A enthält in diesem Fall also Elemente, welche Zahlen sind (die 1). Darüber hinaus sind andere Elemente aber auch selber Mengen, die Zahlen enthalten und um es noch komplexer zu machen,
enthält A auch ein Elemente, dass eine Menge ist, deren Elemente wiederum Mengen sind.

Auf den ersten Blick mag das völlig unlogisch erscheinen (vor allen Dingen für Programmierern, welche
der Meinung waren, dass der Mathematikunterricht überflüssig ist ;-)). Auf der anderen Seite, kann man sich eine Menge als eine Art Behälter vorstellen und Zahlen als Früchte. Nun schiebe ich einen Einkaufswagen durch einen Laden und betrachte diesen (also den Einkaufswagen) als eine
Menge. Zuerst packe ich eine Orange (eine Zahl) hinein. Nun nehme ich eine Tüte und in die Tüte stecke ich einen Apfel und eine Banane. Damit wird die Tüte zur Menge, die ich in den Einkaufswagen
lege. Nun hat der Einkaufswagen ebenfalls Mengen (Tüten) und Zahlen (Orange) als Elemente.

Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen sind gleich, wenn

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

, oder in Worten: zwei Mengen sind dann gleich, wenn alle Elemente, die Element der Menge A sind, auch Element der Menge B sind, und wenn alle Elemente, die Element der Menge B sind, auch Element der Menge A sind.

Wie bereits oben geschrieben, ist die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Menge gleich, da es keine Reihenfolge gibt. Die beiden Mengen

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{3,2,1\}$$

sind also gleich, auch wenn das auf den ersten Blick nicht so aussieht, denn jedes Element von A ist auch Element von B und umgekehrt.

Kardinalität (Mächtigkeit) von Mengen

Bei der Kardinalität - oder auch Mächtigkeit - einer Menge handelt es sich ganz einfach um die Anzahl derer Elemente. Um die Kardinalität einer Menge auszudrücken, setzt man den Namen der Menge in "Absolutzeichen". So gilt beispielsweise, dass für die Menge

$$A = \{1,2,3\}$$

die Kardinalität

$$|A| = 3$$

beträgt.

Eigentlich ein triviales Thema, wenn es nicht auch Mengen mit unendlich vielen Elementen gäbe.

Operationen mit Mengen

Auf Mengen sind eine Reihe von Verknüpfungen anwendbar. Durch Anwendung der Operatoren wird aus zwei (oder mehr) Mengen, eine neue Menge mit neuen Elementen erzeugt.

Durchschnitt

Wird der Durchschnitt zweier Mengen A und B gebildet, so enthält die daraus entstehende Menge alle Elemente, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind. Man schreibt:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Vereinigung

Die Vereininung zweier Mengen A und B erzeugte eine Menge, die alle Elemente aus A und B enthält:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Wichtig ist hierbei, dass in der neu erzeugten Menge jedes Elemente natürlich nur einmal vorhanden ist, da ja oben bereits erklärt wurde, dass eine Menge niemals doppelte Elemente enthält.

Differenz

Wird die Differenz zweier Mengen A und B gebildet, so enthält die neu entstandene Menge alle Elemente von A, die *keine* Elemente von B sind:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Komplementärmenge

Die Komplementärmenge ist *eigentlich* identisch mit der Differenz zweier Mengen. Manchmal wird hier eine andere Schreibweise verwendet, nämlich

$C_B(A) = B \setminus A$

In Worten bedeutet diese Schreibweise: *Komplement von A bezüglich B.*

Weiterhin findet man für die Komplementärmenge oftmals noch andere Notationen.
Die folgenden Schreibweise sind alle identisch und weisen alle auf die Komplementärmenge von A hin:

$A^C = \bar{A} = A'$

Auffällig ist, dass hier keine Menge angegeben wird, bezüglich der die Differenz gebildet werden soll. In diesem Fall wird kann man davon ausgehen, dass die Bezugsmenge die Trägermenge ist, also die Menge, aus deren Elementen die Elemente der Menge A gebildet werden.

Ist beispielsweise A:={1,2,3}, so könnte man als Bezugsmenge die Menge der natürlichen Zahlen vermuten. In diesem Fall liegt nahe, dass

$A^C = \mathbb{N} \setminus A$

Rechenregeln für Mengen

Für die Vereinigung und den Durchschnitt von Mengen gilt zunächst einmal das *Kommutativgesetz:*

$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

Die Reihenfolge, in der zwei Mengen die Vereinigung oder den Durchschnitt bilden, ist also gleich. Weiterhin ist es gleich, in welcher Reihenfolge wir die Vereinigungen oder die Durchschnitte von Mengen berechnen, wenn wir 3 oder mehr Mengen haben:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Das heißt, für die Vereinigung und den Durchschnitt von Mengen gilt ebenso das *Assoziativgesetz*.

Und wie du vielleicht schon vermutet hast, gilt auch das Distributivgesetz, welches uns erlaubt, in Klammern gesetzte Verknüpfungen “auszumultiplizieren”:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Keines dieser drei Gesetze gilt für die Differenz, bzw. das Komplement zweier Mengen!

Das kartesische Produkt

Die weiter oben vorgestellten Operationen auf Mengen erzeugen als Ergebnis immer eine Menge, deren Elemente ganz oder teilweise in den verknüpften Mengen vorkommen. Das kartesische Produkt
ist ebenfalls eine Verknüpfung zweier Mengen, allerdings ist die Ergebnismenge eine völlig neue Art von Menge, deren Elemente in keiner der beiden verknüpften Mengen vorkommt.

Mathematisch formal definiert ist das kartesische Produkt wie folgt:

$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Als Ergebnis des kartesischen Produktes erhalten wir eine Menge von Tupeln, die durch Kombination
aller Elemente der Menge A mit allen Elementen der Menge B entstehen.

> Die Reihenfolge der Elemente in den Tupeln ist relevant. Das erste Element im Tupel ist ein
> Element der ersten Menge (A), das zweite Element eines aus der zweiten Menge.

Nehmen wir als Beispiel die beiden Mengen

$A := \{1,2\}$
$B := \{3,4\}$

Das daraus resultierende kartesische Produkt ist dann

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

Das kartesische Produkt kann auch von mehr als zwei Mengen gebildet werden. In diesem Fall ist die Anzahl der Elemente der Tupel gleich der Anzahl der Mengen, von denen das kartesische Produkt gebildet wird.

Die Potenzmenge

Gegeben sei eine beliebige Menge A. Dann ist die Potenzmenge P(A) die Menge aller Teilmengen von A.
Untersuchen wir das an einem einfachen Beispiel und nehmen eine Menge

$A: = \{1,2,3\}$

Oben haben wir bereits festgestellt, dass eine Menge grundsätzlich immer zwei Teilmengen hat, nämlich sich selbst und die
leere Menge. Damit haben wir also schon mal zwei Kandidaten für die Potenzmenge.

Weiterhin ist natürlich {1}, {2} und {3} eine Teilmenge von A. Und nun Vorsicht, denn das war noch nicht alles. Teilmengen
von A sind auch all diejenigen Mengen, deren Kardinalität größer als 1 und kleiner als 3 (also die Kardinalität der
Menge A selbst) ist. Aus den gegebenen Elementen müssen wir nun also alle Teilmengen von A mit zwei Elementen
bilden. Das sind {1,2}, {1,3} und {2,3}. Mengen wir {3,2} fallen hier heraus, da Mengen nicht geordnet sind und somit
{3,2} = {2,3} gilt.

Damit haben wir alle Teilmengen von A identifiziert und können somit feststellen, dass

$P(A) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

Die Russel’sche Antimonie

Im Allgemeinen ist die Mengenlehre relativ intuitiv und scheint einleuchtend (wenn man Supermärkte,
Einkaufwagen und Früchte als Synonyme verwendet). Genau diese Tatsache
führte allerdings zu Beginn des letzten Jahrhunderts zu massiven Problemen, welches die komplette
Mengenlehre in eine tiefe Krise stürzte.

1903 definierte der Mathematiker Bertrand Russell eine besondere Menge, nämlich die Menge aller Mengen, die sich
nicht selber als Element enthalten:

$R: = \{x \mid xisteineMenge \wedge x \notin x\}$

Zunächst einmal sieht diese Definition recht unspektakulär aus. Mit der Frage, ob die Menge R sich selbst
enthält, öffnete Russel allerdings die Büchse der Pandora.

Angenommen R enthält sich selber, also $R \in R$,
dann widerspricht das der Definition von R, denn laut dieser sind nur solche Mengen Element von R, die sich nicht selbst als
Element enthalten. Genau davon geht die obige Annahme aber aus. Es folgt also daraus, dass

$$R \in R \Rightarrow R \notin R$$

Es gibt Lösungen für dieses Problem, zum Beispiel die von Russel selbst erstellte Typentheorie oder die
Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, in der es grundsätzlich nicht möglich ist, dass eine Menge sich selbst als
Element enthält.

Dieser kleine Exkurs soll nur als Beispiel dafür dienen, wieviele Fallstricke es auf den Wegen der Mathematik geben kann. Theoretisch würde die Russel'sche Antimonie dazu führen, dass die ganze
Mathematik keinen Bestand haben kann, da man mit ihr alles mögliche beweisen könnte, zum Beispiel auch,
dass 1 = 0 ist.